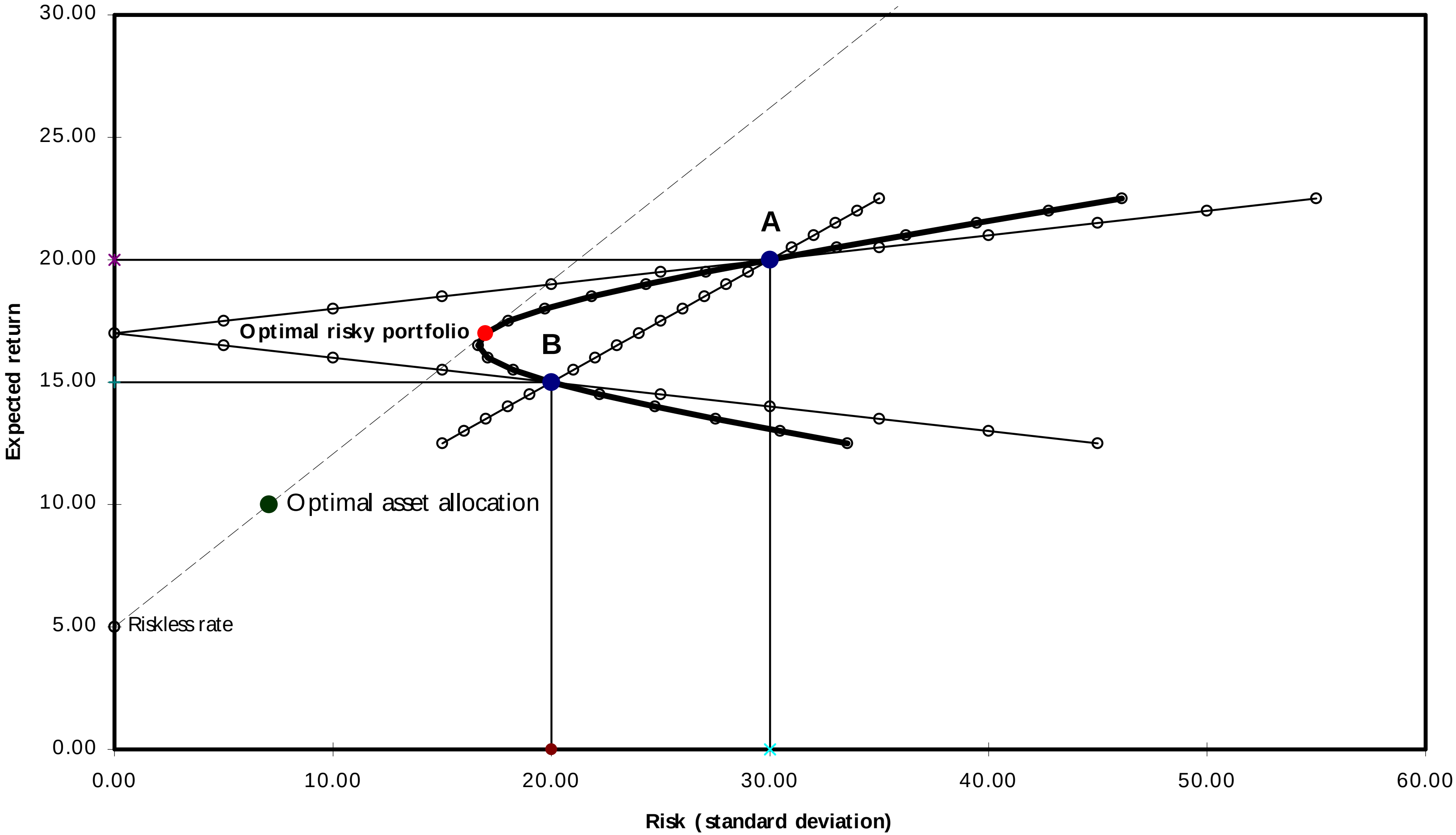
Théorie Financière

7. Relation risque – rentabilité attendue (2/2)

Objectifs pour cette session

1. Revoir l'effet de la combinaison de deux actifs risqués
2. Etendre à la combinaison de plusieurs actifs risqués
3. Définir et comprendre le « béta »
4. Définir et trouver le portefeuille optimal
5. Trouver l'équilibre : CAPM (MEDAF en français)

Rappel: Portefeuilles efficients pour deux actifs



Formules

Rentabilités : distribution normale

$$R_P \sim N(\overline{R}_P, \sigma_P^2)$$

Rentabilité attendue:

$$\overline{R}_P = X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2$$

Variance:

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2 X_1 X_2 \sigma_{12}$$

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_P^2 = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_P^2 = X' \Omega X$$

Choisir un portefeuille avec de nombreux titres

- Composition du portefeuille :
    - $(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N)$
    - $X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_N = 1$

- Rentabilité attendue: $\bar{R}_P = X_1\bar{R}_1 + X_2\bar{R}_2 + \dots + X_N\bar{R}_N$

- Risque: $\sigma_P^2 = \sum_j X_j^2\sigma_j^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} X_i X_j \sigma_{ij} = \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{ij}$

- Note:
    - N termes de variance
    - N(N-1) termes de covariances
    - Les covariances dominent

SolvayBrusselsSchool of Economics and Management

De manière matricielle

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_N \end{bmatrix} \qquad \overline{R} = \begin{bmatrix} \overline{R}_1 \\ \dots \\ \overline{R}_N \end{bmatrix} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_P = X'\overline{R}$$

$$\sigma_P^2 = X'\Omega X$$

Visuellement

Var	Cov	Cov	Cov	Cov
Cov	Var	Cov	Cov	Cov
Cov	Cov	Var	Cov	Cov
Cov	Cov	Cov	Var	Cov
Cov	Cov	Cov	Cov	Var

Exemple

- Considérons le risque d'un portefeuille investi de manière égale dans N actifs "identiques" : $\overline{R}_j = \overline{R}, \sigma_j = \sigma, Cov(R_i, R_j) = \mathrm{cov}$

- Pondération égale: $X_j = \frac{1}{N}$

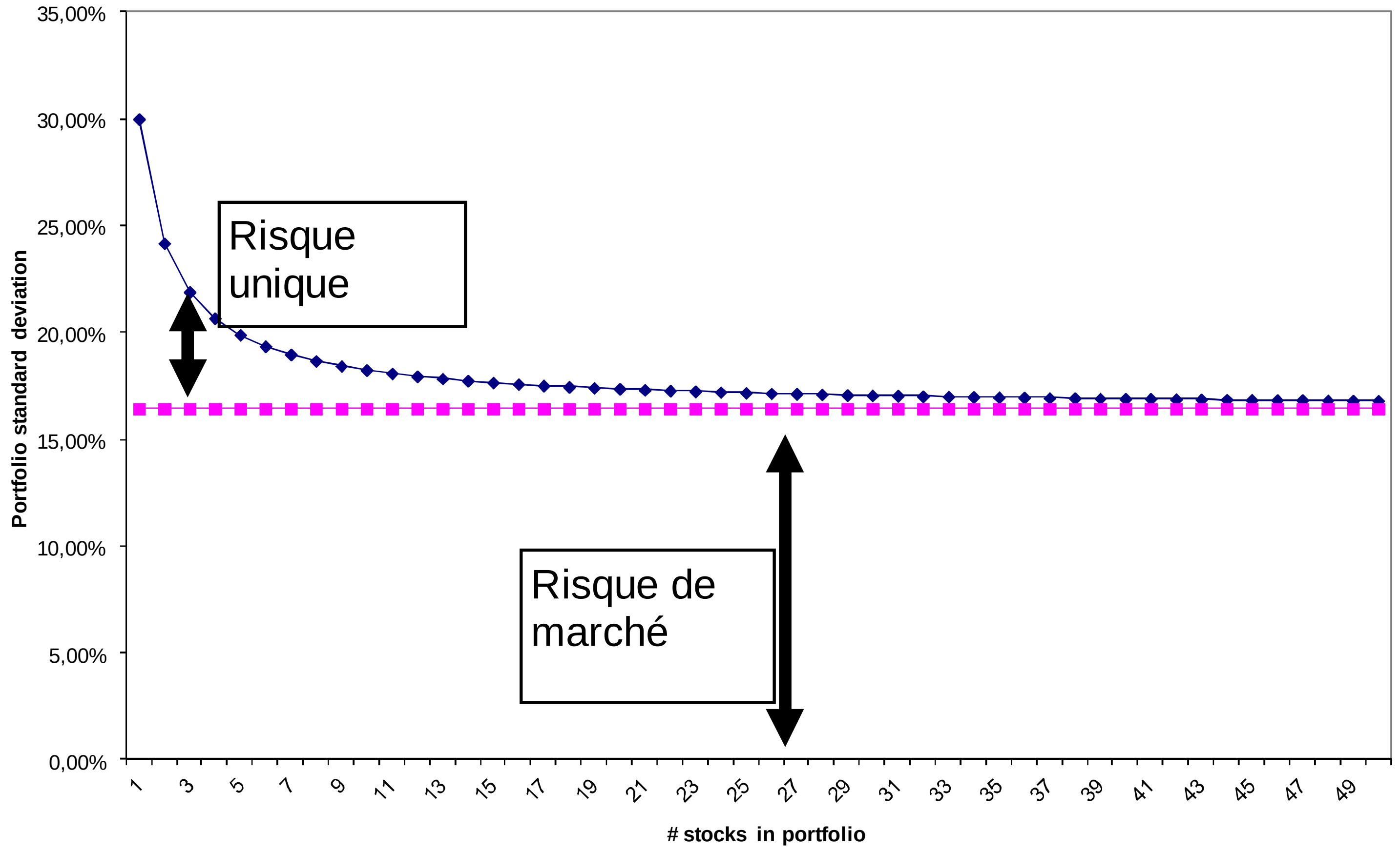
- Variance du portefeuille: $\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\sigma^2 + (1 - \frac{1}{N})\,\mathrm{cov}$

- Si on augmente le nombre d'actifs ?:

- Variance du portefeuille: $\sigma_P^2 \to \mathrm{cov}$
  $N \to \infty$

Diversification

Reduction du risque pour un portefeuille à pondération égale



Conclusion

1. La diversification paye – ajouter des titres au portefeuille diminue le risque du portefeuille. Ceci est du au fait que les titres ne sont pas parfaitement corrélés
2. Il y a une limite aux bénéfices de la diversification : le risque du portefeuille ne peut être inférieur à la covariance moyenne (cov) entre les titres

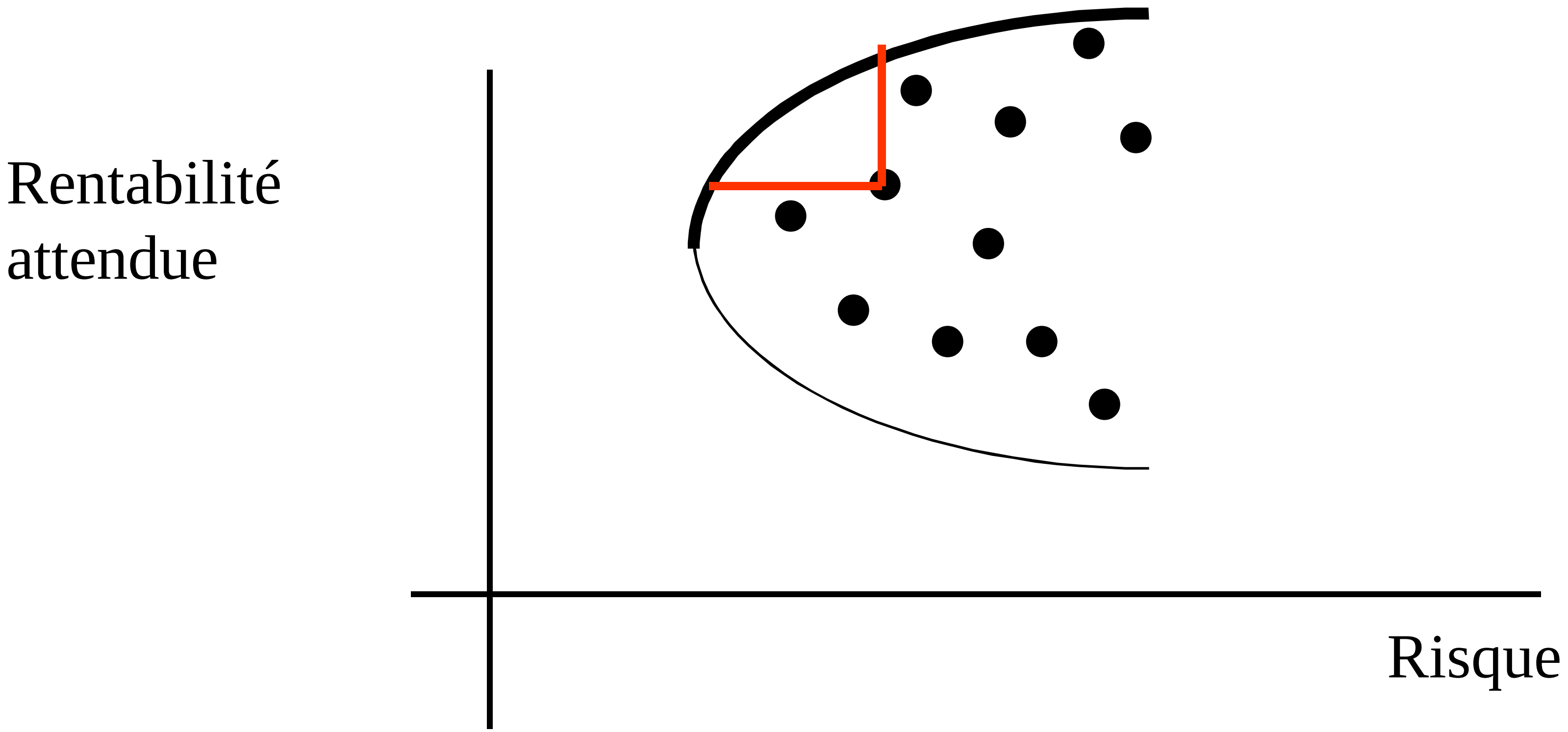
- La variance des rentabilités d'un titre peut être décomposée de la manière suivante:

Risque total d'un titre seul	=	Risque du portefeuille	+	Risque non-systématique ou risque diversifiable

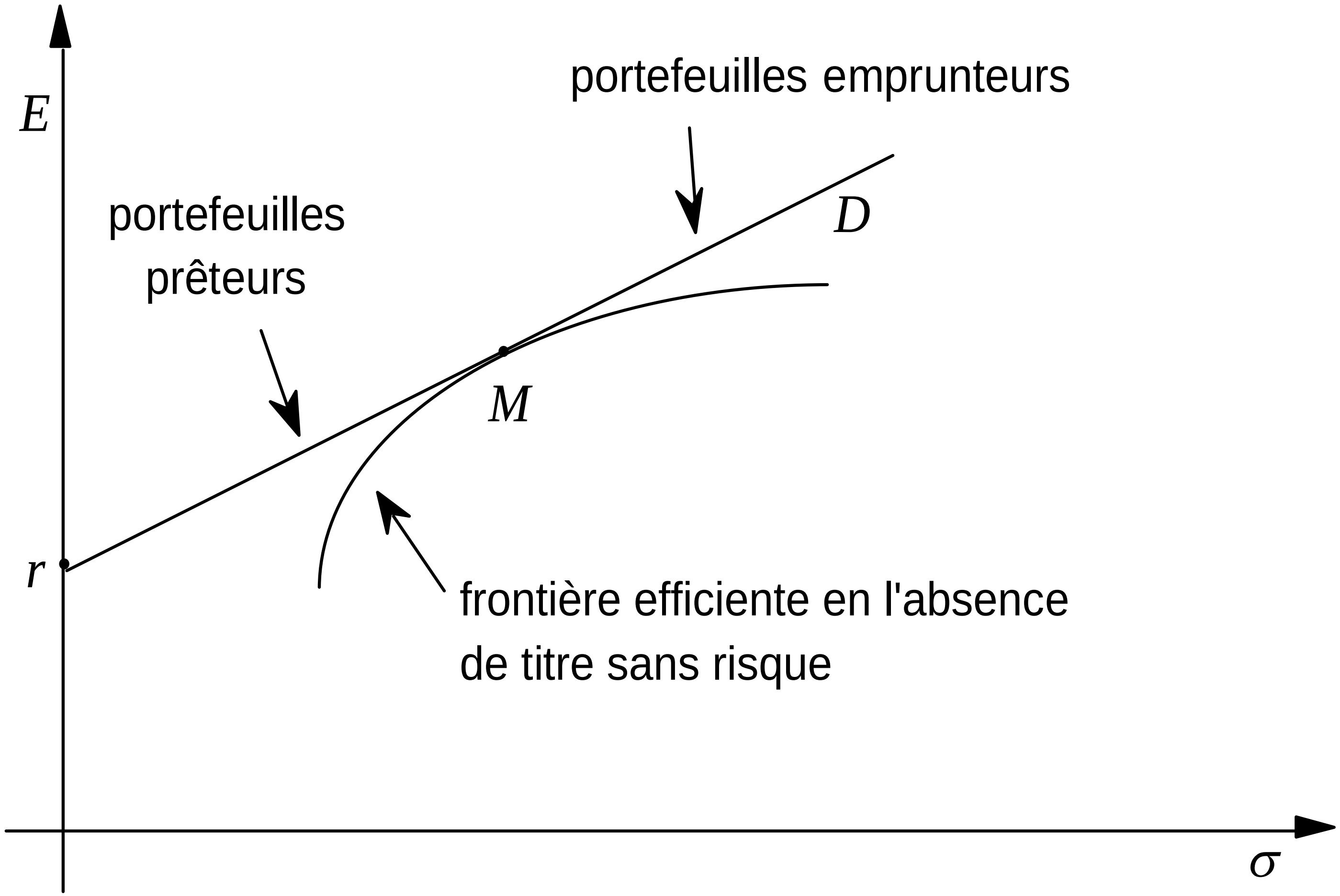
- La définition correcte du risque d'un titre individuel dans un portefeuille M est la ***covariance*** de ce titre avec le portefeuille.

La frontière efficiente avec de nombreux titres

- Choix de portefeuille: choisir un portefeuille efficient
- Les portefeuilles efficients ont une rentabilité attendue supérieure pour un risque donné
- Ils se trouvent sur la limite supérieure de la région dans laquelle les portefeuilles sont compris



CAPM (un avant-goût)



Capital asset pricing model (CAPM)

Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

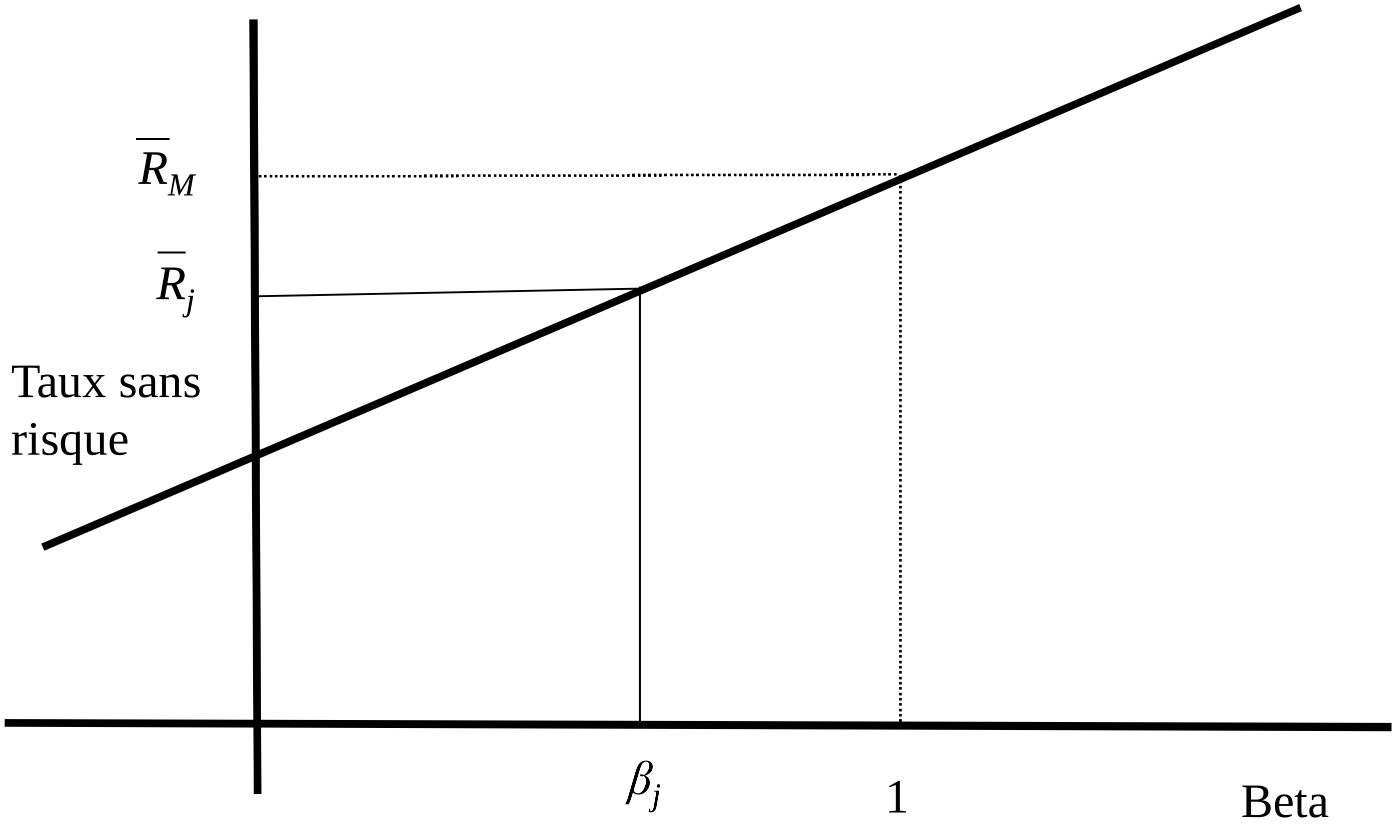
- Hypothèses du CAPM, n titres risqués définis par leur rentabilité attendue et leur variance, un actif sans risque r_f
- Tous les investisseurs sont rationnels, averses au risque et disposent de la même information. Tous les **portefeuilles détenus** sont donc **efficients.**
- Les agents se distinguent uniquement par leur niveau d'**aversion au risque**.
- Le modèle est **statique** (une période)
- C**ondition d'équilibre** (offre = demande) pour les actifs **risqués** uniquement.
  – L'offre est supposée fixe: ce sont les titres existant sur le marché en t .
  – La demande émane des investisseurs
- Conclusion principale: **Tout le monde choisit le même portefeuille optimal M (Cf graphe)!**
- **Condition d'équilibre M composé comme le marché dans son ensemble**

Capital asset pricing model (CAPM)
Modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

- Principales implications
- M est le portefeuille de marché, un portefeuille pondéré par la valeur de marché de tous les titres. En d'autres termes la proportion X_i investie dans un titre sera $X_i = K_i / K$
- Avec K_i la capitalisation boursière du titre i et K la capitalisation boursière du marché dans son ensemble
- Le risque du titre sera donné par son Beta
- Beta est une mesure de la sensibilité de la rentabilité du titre par rapport à la rentabilité du portefeuille de marché
- Le Beta moyen de tous les titres pondérés par leur capitalisation boursière relative équivaut au Beta du portefeuille de marché et vaut donc 1

Capital Asset Pricing Model

Rentabilité attendue $\overline{R}_j = R_F + (\overline{R}_M - R_F) \times \beta_j$



Mesurer le risque d'un titre individuel

- La mesure du risque d'un titre individuel dans un portefeuille doit incorporer l'impact de la diversification.
- L'écart-type n'est pas une mesure correcte pour le risque d'un titre individuel dans un portefeuille.
- Le risque d'un titre individuel est son risque systématique ou risque de marché, la partie du risque qui ne peut être éliminée par diversification.
- Rappel: le portefeuille optimal est le portefeuille de marché.
- Le risque d'un titre individuel est mesuré par son beta.
- La définition du beta est:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M}$$

Beta

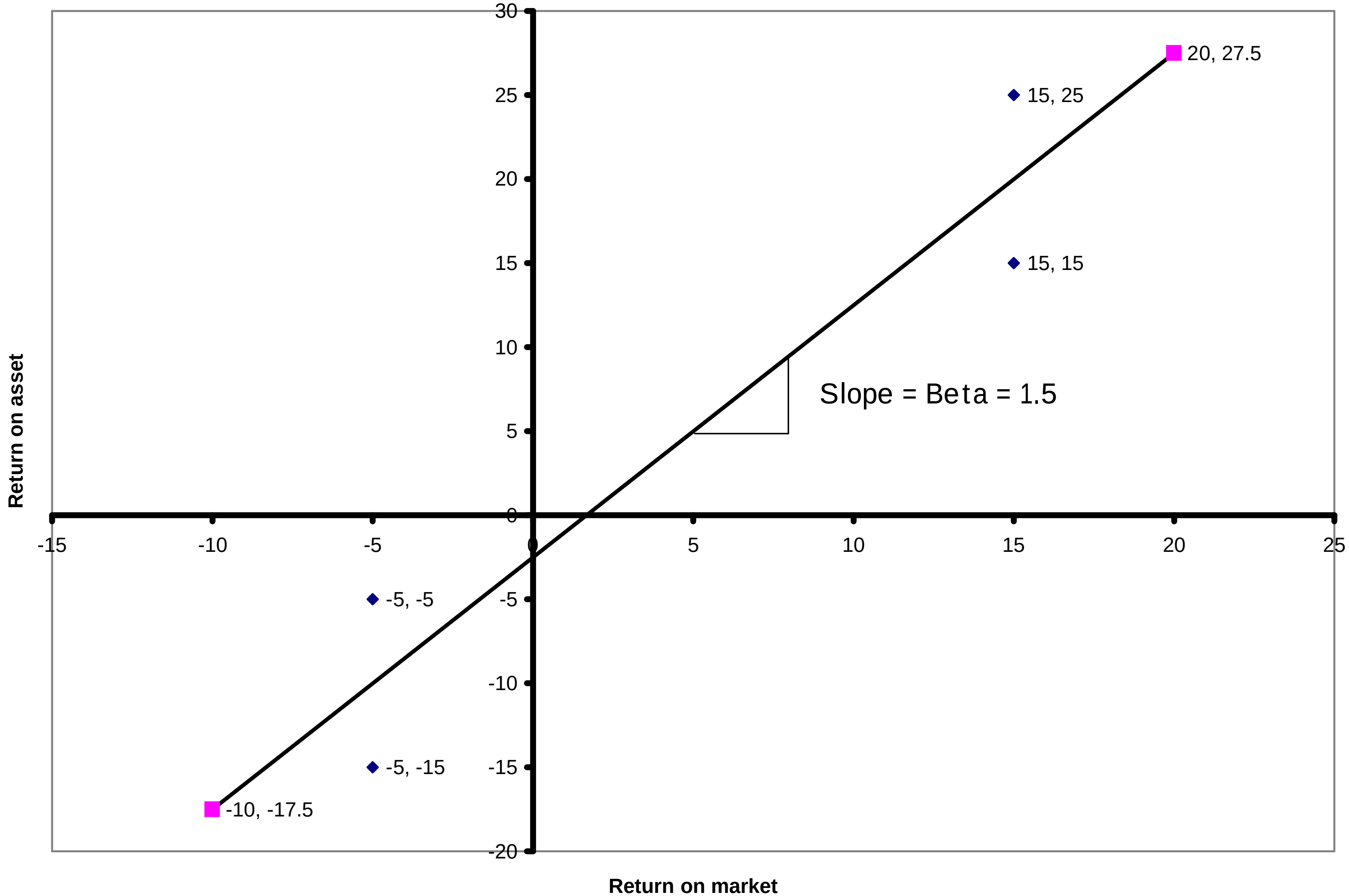
- Plusieurs interprétations du beta sont possibles:

(1) Beta est la réaction du coefficient de R_i à une variation du marché

(2) Beta est la contribution relative de l'actif *i* à la variance du portefeuille de marché

(3) Beta indique si le risque du portefeuille va croître ou décroître si le poids de *i* dans le portefeuille est légèrement modifié

(1) Beta comme pente



(1) Une mesure du risque systématique : beta

- Considérons le modèle linéaire suivant $$R_t = \alpha + \beta \times R_{Mt} + u_t$$

- R_t Rentabilité réalisée pour l'actif durant la période t
- α Une constante : la rentabilité que l'actif réaliserait à n'importe quelle période
- R_{Mt} Rentabilité réalisée par le marché dans son ensemble durant la période t
- β Une mesure de la réponse de la rentabilité de l'actif par rapport à la rentabilité du marché
- u_t La rentabilité spécifique de l'actif pour la période t (rentabilité idiosyncratique ou rentabilité non systématique)- une variable aléatoire de moyenne 0
- Décomposition de la rentabilité entre:
  - La part relative au marché $ß\ R_{Mt}$
  - La part spécifique à l'entreprise $\alpha + u_t$

(1) Beta - illustration

- Supposons $R_t = 2\% + 1.2\ R_{Mt} + u_t$

- Si $R_{Mt} = 10\%$
- La rentabilité de l'action compte tenu de la rentabilité du marché sera de:
- $E[R_t \mid R_{Mt}] = 2\% + 1.2 \times 10\% = 14\%$

- Si $R_t = 17\%$, $u_t = 17\%-14\% = 3\%$

(1) Mesurer Beta

- Données: rentabilités passées pour le titre et pour le marché
- Régression linéaire: pente de la régression = beta estimé

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Beta Calculation - monthly data								
2		Market	A	B					
3	Mean	2.08%	0.00%	4.55%		D3. =AVERAGE(D12:D23)			
4	StDev	5.36%	4.33%	10.46%		D4. =STDEV(D12:D23)			
5	Correl		78.19%	71.54%		D5. =CORREL(D12:D23,$B$12:$B$23)			
6	R^2		61.13%	51.18%		D6. =D5^2			
7	Beta	1	0.63	1.40		D7. =SLOPE(D12:D23,$B$12:$B$23)			
8	Intercept	0	-1.32%	1.64%		D8. =INTERCEPT(D12:D23,$B$12:$B$23)			
9									
10	Data								
11	Date	Rm	RA	RB					
12	1	5.68%	0.81%	20.43%					
13	2	-4.07%	-4.46%	-7.03%					
14	3	3.77%	-1.85%	-10.14%					
15	4	5.22%	-1.94%	6.91%					
16	5	4.25%	3.49%	4.65%					
17	6	0.98%	3.44%	7.64%					
18	7	1.09%	-4.27%	8.41%					
19	8	-6.50%	-2.70%	-1.25%					
20	9	-4.19%	-4.29%	-11.19%					
21	10	5.07%	3.75%	13.18%					
22	11	13.08%	9.71%	19.22%					
23	12	0.62%	-1.67%	3.77%					

(2) Décomposition de la variance du portefeuille

- Combien chaque titre contribue-t-il au risque du portefeuille?

- La variance d'un portefeuille avec 2 titres risqués

- Peut s'écrire $$\sigma_P^2 = X_A^2\sigma_A^2 + 2X_A X_B \sigma_{AB} + X_B^2\sigma_B^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (X_A^2\sigma_A^2 + X_A X_B \sigma_{AB}) + (X_A X_B \sigma_{AB} + X_B^2\sigma_B^2) \\ &= X_A(X_A\sigma_A^2 + X_B\sigma_{AB}) + X_B(X_A\sigma_{AB} + X_B\sigma_B^2) \\ &= X_A\sigma_{AP} + X_B\sigma_{BP}\end{aligned}$$

- La variance du portefeuille est la moyenne des covariances de chaque titre pris individuellement avec le portefeuille.

(2) Beta et la décomposition de la variance

- La variance du portefeuille de marché peut s'écrire:

$$\sigma_M^2 = X_1\sigma_{1M} + X_2\sigma_{2M} + \ldots + X_i\sigma_{iM} + \ldots + X_n\sigma_{nM}$$

- Pour calculer la contribution de chaque titre au risque global, divisons chaque terme par la variance du portefeuille

$$X_1\frac{\sigma_{1M}}{\sigma_M^2} + X_2\frac{\sigma_{2M}}{\sigma_M^2} + \ldots + X_i\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} + \ldots + X_n\frac{\sigma_{nM}}{\sigma_M^2} = 1$$

$$ou$$

$$X_1\beta_{1M} + X_2\beta_{2M} + \ldots + X_i\beta_{iM} + \ldots + X_n\beta_{nM} = 1$$

(2) Beta et la décomposition de la variance

- La variance du portefeuille de marché peut s'écrire:

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i^M X_j^M \sigma_{ij}$$

- Ceci peut se réécrire:

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^M \underbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j^M \operatorname{cov}(R_i, R_j)}_{\operatorname{cov}\left(R_i, \sum_j X_j^M R_j\right)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^M \operatorname{cov}(R_i, R_M)$$

- Car $\sum_j X_j^M R_j = R_M$

- En normalisant, ceci devient: $1 = \sum_{i=1}^{n} X_i^M \dfrac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$

- Ceci représente le β, la contribution normalisée du titre au risque du portefeuille

(3) Contribution marginale au risque: un peu de math

- Supposons un portefeuille *M*. Que se passe-t-il si la proportion investie dans le titre *I* change?
- Supposons qu'une fraction *X* soit investie dans le titre *i*

$$\sigma_P^2 = (1-X)^2\sigma_M^2 + 2X(1-X)\sigma_{iM} + X^2\sigma_i^2$$

- La dérivée première par rapport à *X* pour *X* = 0

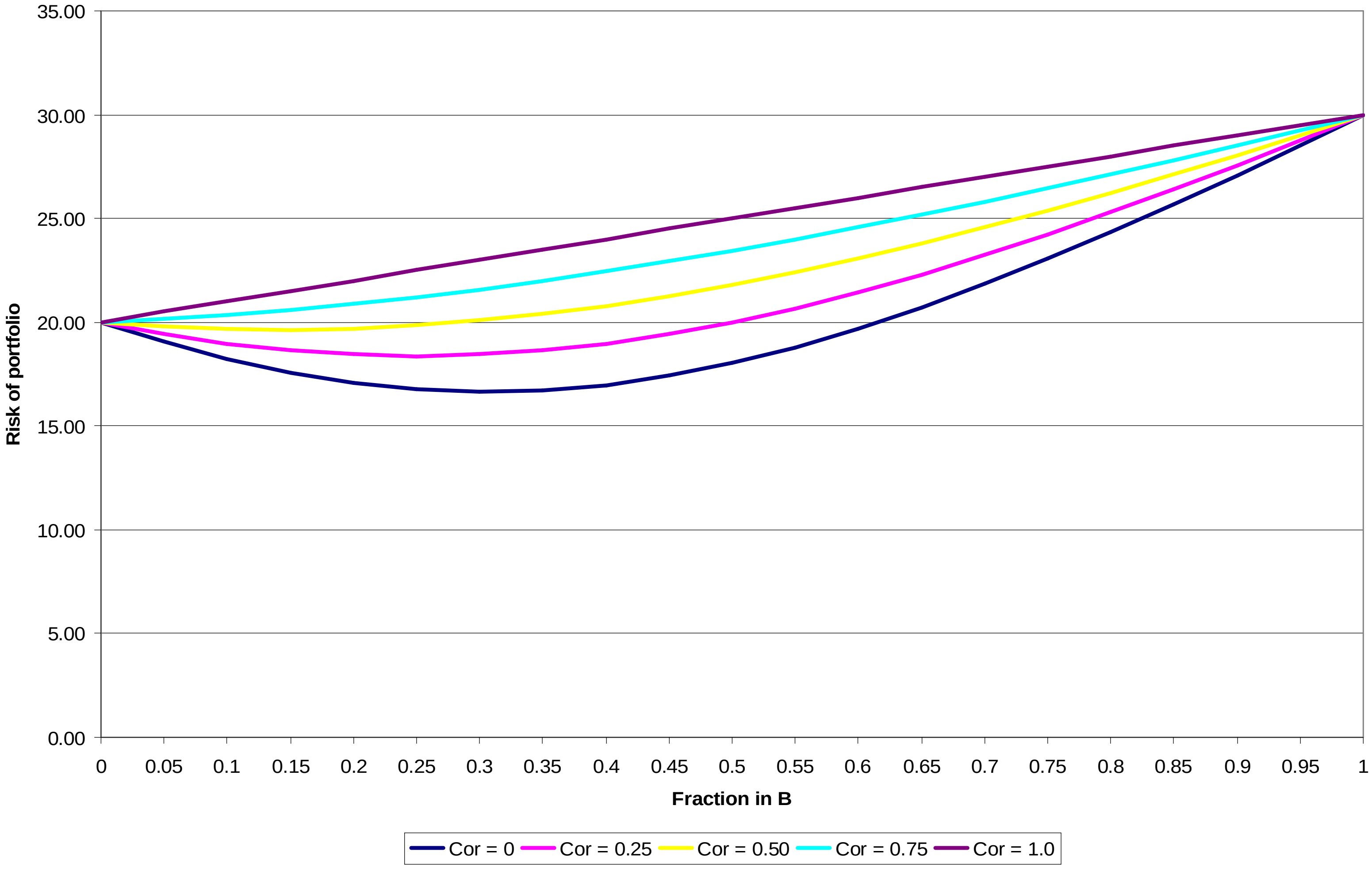
$$\left.\frac{d\sigma_P^2}{dX}\right|_{X=0} = 2(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)$$

- Le risque du portefeuille grandit si:

$$\sigma_{iM} > \sigma_M^2$$

- La contribution marginale du titre *i* au risque vaut σ_{iM}

(3) Contribution marginale au risque: illustration



(3) Beta et contribution marginale au risque

- Augmentons (légèrement) le poids de *i*:

- Le risque du portefeuille s'accroît si: $$\sigma_{iM} > \sigma_M^2 \Leftrightarrow \beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} > 1$$

- Le risque du portefeuille est inchangé si:

$$\sigma_{iM} = \sigma_M^2 \Leftrightarrow \beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = 1$$

- Le risque du portefeuille diminue si:

$$\sigma_{iM} < \sigma_M^2 \Leftrightarrow \beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} < 1$$

Au cœur du beta

- La relation entre le coefficient de corrélation et la covariance s'écrit:

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \sigma_M}$$

- Beta peut s'écrire comme:

$$\beta_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \rho_{iM}\,\frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

- Deux éléments déterminent le beta
  - la corrélation de la rentabilité du titre avec celle du marché
  - la volatilité relative du titre par rapport à celle du marché

Propriétés du beta

- Le beta a deux propriétés importantes à garder à l'esprit

(1) La moyenne pondérée des beta en considérant tous les titres vaut l (le « portefeuille de marché »)

$$X_{1M}\beta_1 + X_{2M}\beta_2 + \ldots + X_{iM}\beta_i + \ldots + X_{nM}\beta_n = 1$$

(2) Le beta d'un portefeuille est la moyenne pondérée des betas des titres

$$\beta_P = X_{1P}\beta_1 + X_{2P}\beta_2 + \ldots + X_{iP}\beta_i + \ldots + X_{nP}\beta_n$$

Prime de risque et beta

- La rentabilité attendue d’un titre est liée positivement à son beta

- Capital-Asset Pricing Model (CAPM) :

$$\overline{R}_i = R_F + (\overline{R}_M - R_F) \times \beta_i$$

- La **rentabilité attendue** d’un titre vaut:

Le **taux sans risque**

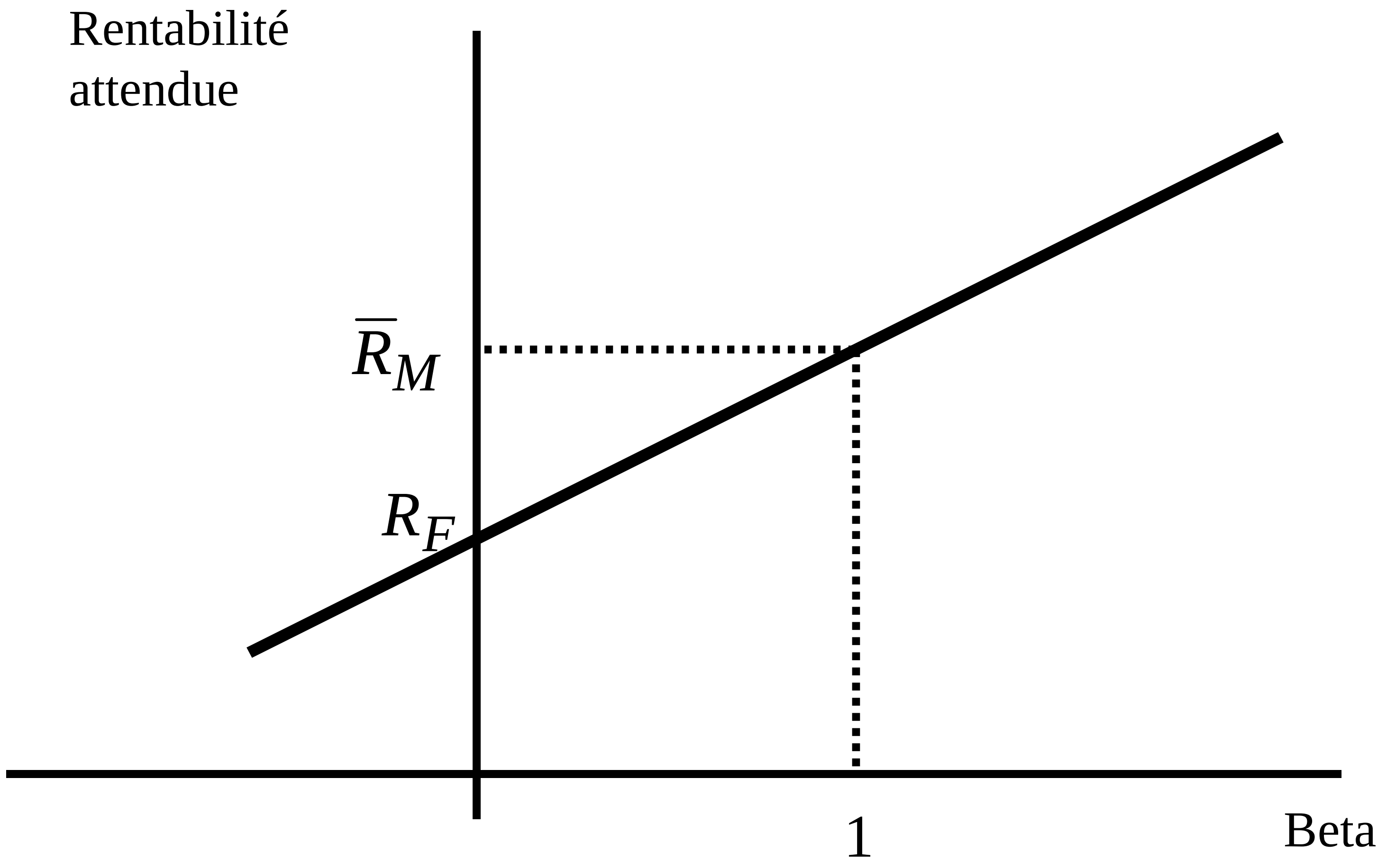
Plus

la **rentabilité excédentaire du marché** (la prime de risque du marché)

fois

le Beta du titre

CAPM - Illustration



CAPM - Exemple

Supposons: Taux sans risque = 6% Prime de risque du marché = 8.5%

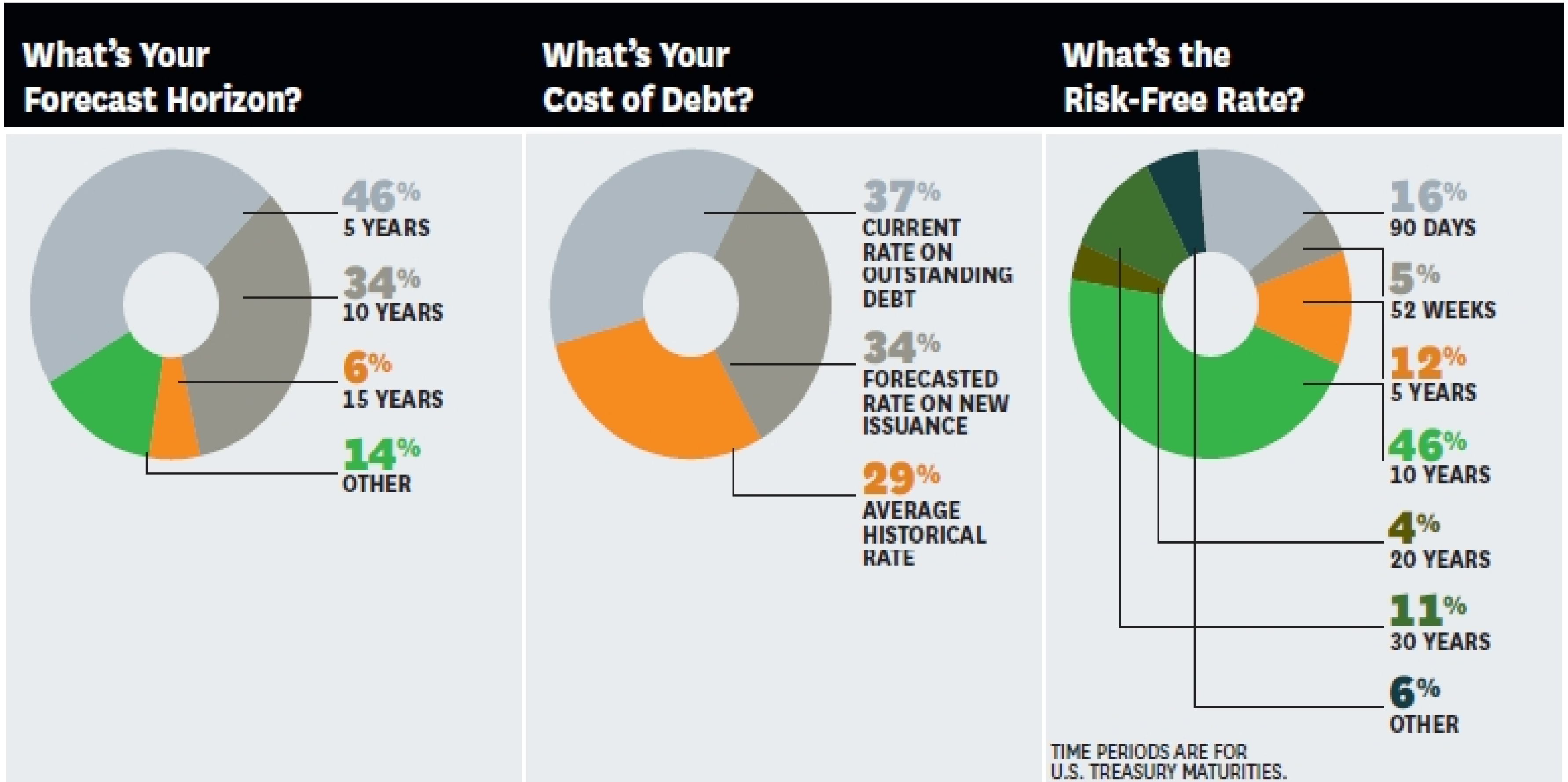
	Beta	Rentabilité attendue (%)
American Express	1.5	18.75
BankAmerica	1.4	17.9
Chrysler	1.4	17.9
Digital Equipement	1.1	15.35
Walt Disney	0.9	13.65
Du Pont	1.0	14.5
AT&T	0.76	12.46
General Mills	0.5	10.25
Gillette	0.6	11.1
Southern California Edison	0.5	10.25
Gold Bullion	-0.07	5.40

Et en pratique?

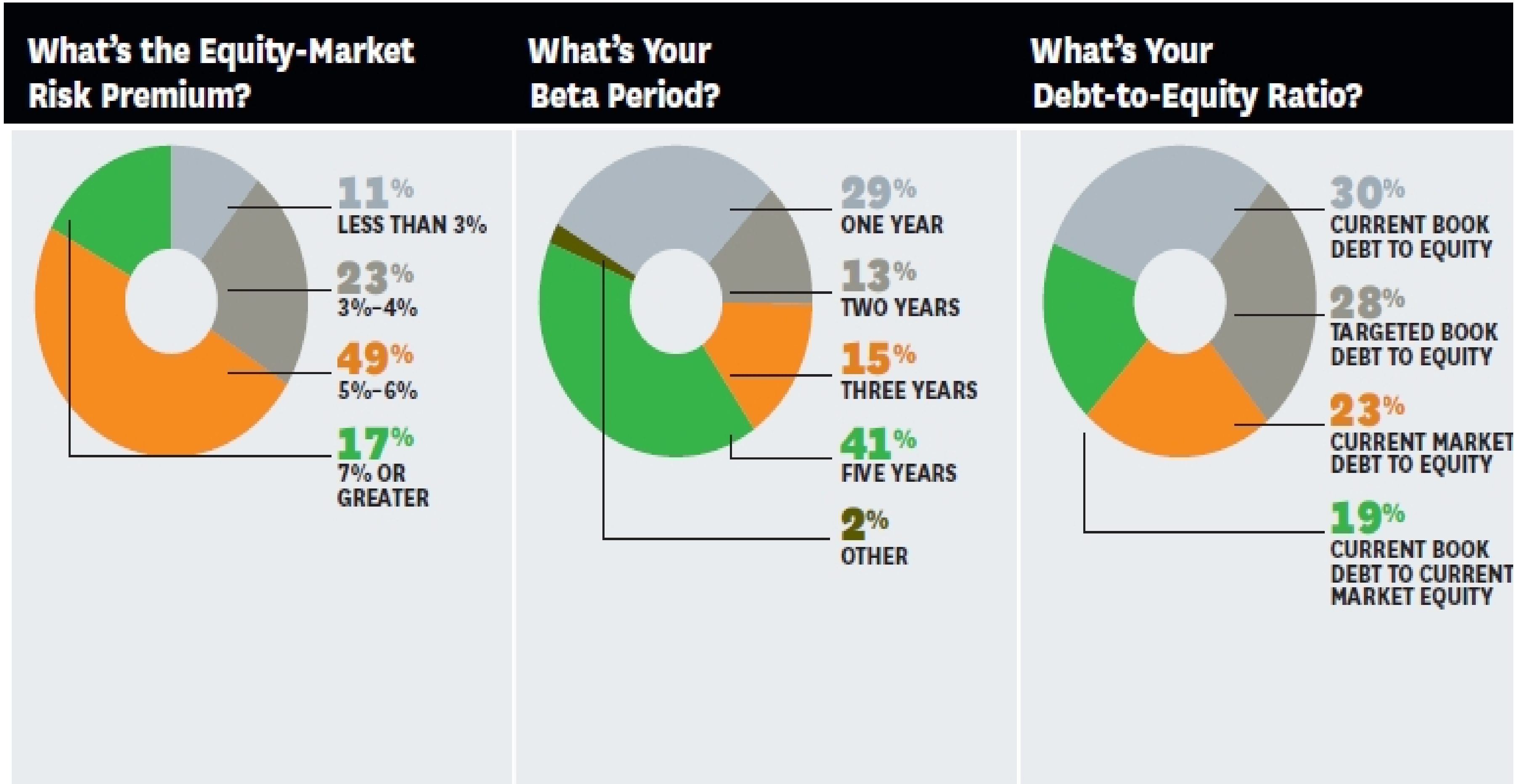
- Modèle le plus utilisé
- Mais certainement pas dénué de critique et de problèmes au niveau empirique
- Certains éléments autres que la rentabilité du marché semblent jouer un rôle dans les returns (d'autres éléments entraînent des primes)
- L'évaluation des Betas dépend fortement de l'horizon considéré et il n'y a pas de consensus à ce sujet
- La prime de risque à retenir fait encore plus l'objet de débats et influence donc fortement le résultat

- Voir Jacobs et Shivdasani (2012)

Jacobs et Shivdasani (2012)



Jacobs et Shivdasani (2012)



ULB

Solvay Brussels School of Economics and Management

Modèles alternatifs?

- Arbitrage Pricing Theory (APT, Ross, 1976)
- Idée dépasser le CAPM qui est un modèle à un facteur en introduisant plusieurs facteurs
- Idée de base: il existe un ensemble de facteurs (un nombre limité de facteurs) qui permettent de modéliser les rentabilités
- Trois hypothèses principales:

A) Les rentabilités des titres risqués peuvent être décrites par un modèle à facteur

B) Le nombre de titres existant est assez important pour éliminer le risque idiosyncratique

C) Des marches fonctionnant correctement ne peuvent laisser d'opportunités d'arbitrage

APT

- Dans une version simple à un facteur, le modèle retombe sur les mêmes conclusions que le CAPM
- Mais évidemment on peut considérer plus de facteurs
- Chen, Roll et Ross (1986), facteurs macros:
  - % changement dans la production industrielle
  - % changement d'inflation non-anticipée
  - Différence de rentabilité entre les obligations corporate LT et les obligations souveraines LT
  - Rentabilité excédentaire des obligations LT souveraines par rapport au T-Bills
- Mais aussi possibilité de considérer des facteurs liés aux entreprises elles-mêmes

Fama et french Three Factor Model

- Fama et French (1996): devenu un standard de base en finance
- Inclus dans la régression d'autres facteurs liés à la taille de l'entreprise et à son book to market ratio

- $r_{it} = \alpha_i + \beta_{im}R_{mt} + \beta_{iSMB}SMB_t + \beta_{iHML}HML_t + \varepsilon_{it}$

- Avec SMB: Small – Big (rentabilité excédentaire des portefeuilles small cap par rapport aux large cap)

- Avec HML: High – Low (rentabilité excédentaire des portefeuilles high Book/Market par rapport au Low Book/Market)

- NB: ces deux facteurs additionnels sont inclus sur base empirique et non pour une raison théorique précise

Critiques

- En l'absence de raison théorique l'inclusion de facteurs peut être critiquée
- Danger de rentrer dans une forme de data-mining et d'inclure finalement comme facteurs des artefacts statistiques du passé (Black, 1993)
- Le modèle a parfois été augmenté d'un facteur « momentum »

- Des modèles spécifiques ont par ailleurs été développés pour certains types d'industries, exemple le modèle de Fung et Hsieh pour les hedges funds qui incorpore
- 3 facteurs de tendances (obligation, devises et matières premières)
- 2 facteurs orientés « actions » (Equity market, size spread)
- 2 facteurs orientés obligations (10 years treasury maturity, credit spread)
- 1 facteur « émergent »